Inhaltsverzeichnis

1 Rationale Zahlen

Addition/ Subtraktion negativer Zahlen

Man unterscheidet zwei Fälle:

1. Beide Zahlen haben das gleiche Vorzeichen:
   Das Ergebnis erhält das gemeinsame Vorzeichen und die Beträge werden addiert.
   $+2+7=+9$ (Das gemeinsame Vorzeichen ist $+$)
   $-2-9=-9$ (Das gemeinsame Vorzeichen ist $-$)

2. Beide Zahlen haben unterschiedliche Vorzeichen:
   Das Ergebnis erhält das Vorzeichen des größeren Betrags und man berechnet die Differenz der Beträge.
   $+7-2=+5$ (Das Vorzeichen des größeren Betrags ist $+$)
   $-2+7=+5$ (Das Vorzeichen des größeren Betrags ist $+$)
   $+2-7=-5$ (Das Vorzeichen des größeren Betrags ist $-$)
   $-7+2=-5$ (Das Vorzeichen des größeren Betrags ist $-$)

Negative Zahlen und Klammern

Wenn ein $+$ vor der Klammer steht, lässt man einfach die Klammer und das $+$ vor der Klammer weg:

$375+(-235)$	$=375-235$	$=140$	Wenn Schulden hinzugefügt
$-375+(-235)$	$=-375-235$	$=-610$	werden, wird man ärmer.

Wenn ein $-$ vor der Klammer steht, müssen die Vorzeichen in der Klammer umgedreht werden, danach lässt man die Klammer und das $-$ vor der Klammer weg.

$375-(-235)$	$=375+235$	$=610$	Wenn Schulden weggenommen
$-375-(-235)$	$=-375+235$	$=-140$	werden, wird man reicher.

Multiplikation/Division von rationalen Zahlen

Das Ergebnis der Multiplikation/Division zweier rationaler Zahlen erhält man, indem man

1. die Zahlen ohne Vorzeichen miteinander multipliziert/dividiert,

2. das Vorzeichen ermittelt:
   sind die Vorzeichen gleich, ist das Ergebnis positiv.
   (+ mal + ergibt + und - mal - ergibt +)

   sind die Vorzeichen unterschiedlich, ist das Ergebnis negativ.
   (+ mal - ergibt - und - mal + ergibt -)

Bsp.:

$(+3)\cdot(-5)=-15$ $\quad$ $(+2):(-4)=-0,5$

$(-6,1)\cdot(-2)=+13,2$ $\quad$ $(-1,5):(-3)=0,5$

2 Zuordnungen

Zuordnungen

In vielen Alltagssituationen findet man einen Zusammenhang zwischen Bereichen von **Größen**.
Zu einer Größe aus dem ersten Bereich gehört eine Größe aus dem zweiten Bereich.
Solche **Zuordnungen** werden durch einen Pfeil bezeichnet.

Beispiel:

Gewicht $\longrightarrow$ Preis
Zeit $\longrightarrow$ Temperatur
Alter $\longrightarrow$ Körpergröße

Zuordnungen werden in **Tabellen**, in **Schaubildern** oder in **Pfeilbildern** dargestellt. Manchmal werden sie auch durch eine **Rechenvorschrift** beschrieben.

Proportionale Zuordnungen

Zuordnungen, bei denen sich die eine Größe verdoppelt (halbiert), verdreifacht (drittelt) usw. wenn sich die andere Größe auch verdoppelt (halbiert), verdreifacht (drittelt), usw. nennt man proportionale Zuordnungen.

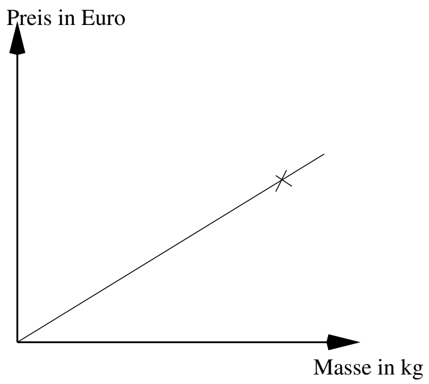
Bsp.: 1 kg Äpfel kostet 2 €, dann kosten 2 kg Äpfel 4 € und 3 kg kosten 6 €, usw..

	Masse (kg)	Preis (Euro)	
·2	1	2	·2
·3	2	4	·3
	3	6	

	Masse (kg)	Preis (Euro)	
:2	1	2	:2
:3	$\frac{1}{2}$	1	:3
	$\frac{1}{3}$	0,67	

Graph einer proportionalen Zuordnungen

Die Wertepaare einer Zuordnung kann man als Punkte in ein Koordinatensystem einzeichnen. Bei einer proportionalen Zuordnung liegen alle diese Punkte auf einer Geraden durch den Ursprung $(0|0)$.
Um den Graph zu zeichnen benötigst du nur ein Wertepaar.

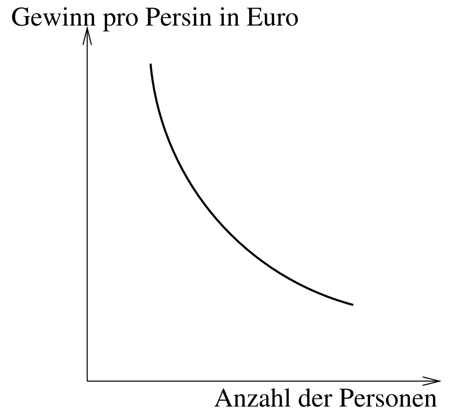


Umgekehrt proportionale Zuordnungen

Wenn sich die eine Größe verdoppelt, verdreifacht, usw., die andere Größe aber halbiert, drittelt usw., handelt es sich um eine **umgekehrt proportionale Zuordnung**.

Alle Punkte der umgekehrt proportionalen Zuordnung liegen auf einer Kurve, diese Kurve heißt **Hyperbel**. Bsp.:

Anzahl der Personen	Gewinn pro Persin in Euro
12	80
$:2$ 6	160 $\cdot 2$
$:3$ 4	240 $\cdot 3$
$\cdot 2$ 24	40 $:2$



Dreisatz

Bevor du mit dem Verfahren rechnest, musst du sicher sein, dass es sich um eine <u>proportionale</u> oder <u>umgekehrt proportionale</u> Zuordnung handelt.
Man geht in 3 Schritten vor:
1. Ein gegebenes Wertepaar aufschreiben.
2. Zwischenwert berechnen.
3. Gesuchten Wert berechnen.

Bsp.:

<u>Proportionale Zuordnung:</u>

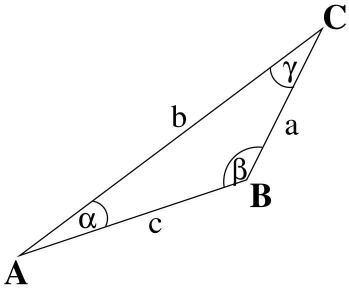
Masse (kg)	Preis (Euro)
2	4
$:2$ 1	2 $:2$
$\cdot 3$ 3	6 $\cdot 3$

<u>Umgekehrt proportionale Zuordnung</u>

Anzahl der Personen	Gewinn pro Persin in Euro
12	80
$:2$ 6	160 $\cdot 2$
$\cdot 4$ 24	40 $:4$

3 Geometrie

Bezeichnung von Dreiecken

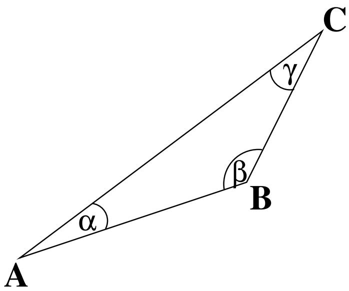


Punkte: Die drei Punkt eines Dreiecks werden mit Großbuchstaben und gegen den Uhrzeigersinn bezeichnet.

Seiten: Seiten werden mit kleinen Buchstaben bezeichnet.
Die Seite a liegt dem Punkt A gegenüber usw..

Winkel: Die Winkel werden nach dem Scheitelpunkt gekennzeichnet:
$A \rightarrow \alpha, B \rightarrow \beta, C \rightarrow \gamma$

Winkelsumme Dreieck

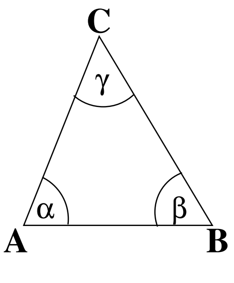


Die Summe der Winkel in einem Dreieck beträgt 180°:

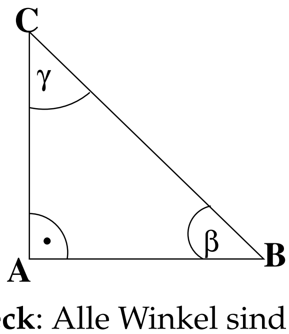
$\alpha + \beta + \gamma = 180$

Dreiecksformen nach Winkeln

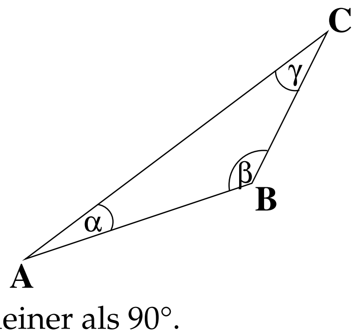
drei spitze Winkel



ein rechter Winkel

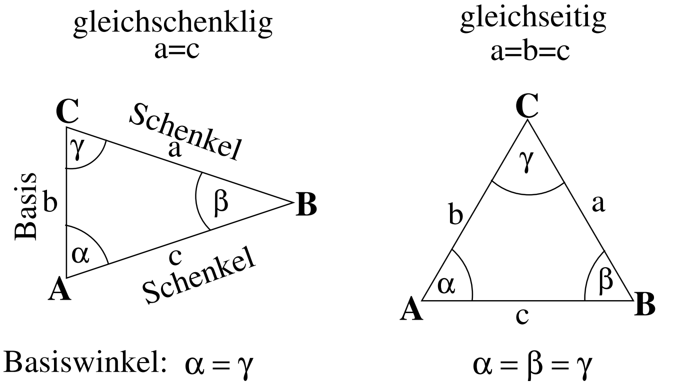


ein stumpfer Winkel



spitzwinkliges Dreieck: Alle Winkel sind kleiner als 90°.
rechtwinkliges Dreieck: Ein Winkel ist 90° groß.
stumpfwinkliges Dreieck: Ein Winkel ist größer als 90°.

Dreiecksformen nach Seitenlänge



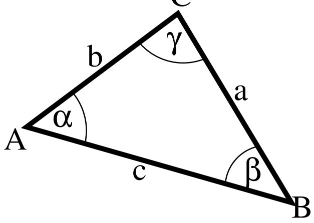
gleichschenkliges Dreieck:
Zwei Seiten sind gleich lang. Diese Seiten heißen Schenkel.
Die dritte Seite heißt Basis. Die Basiswinkel sind gleich groß

gleichseitiges Dreieck:
Alle drei Seiten sind gleich lang.
Bei einem gleichseitigen Dreieck sind auch alle drei Winkel gleich groß.
Jedes gleichseitige Dreieck ist auch gleichschenklig.

Kongruenzsatz SSS

Zwei Dreiecke sind kongruent (deckungsgleich) wenn sie in allen 3 Seiten übereinstimmen.

Planfigur

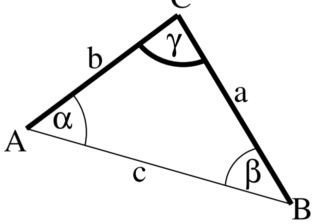


Konstruktionsbeschreibung
Beispiel: gegeben: a=4cm, b=5cm, c=3,5cm
Konstruiere
1. die Seite c
2. den Kreis um A mit dem Radius b=5cm
3. den Kreis um B mit dem Radius a=4cm
4. den Schnittpunkt der Kreise, das ist der Punkt C.

Kongruenzsatz SWS

Zwei Dreiecke sind kongruent (deckungsgleich), wenn sie in 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Planfigur

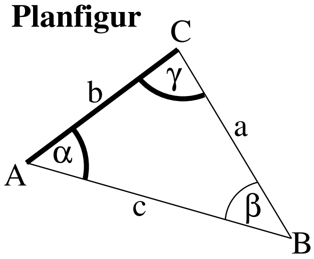


Konstruktionsbeschreibung
Beispiel: gegeben: a=4cm, b=5cm, $\gamma = 70$
Konstruiere
1. die Seite b mit den Punkten A und C
2. den Winkel γ
3. den Kreis um C mit dem Radius a=4cm und erhalte B.
4. die Seite c.

Kongruenzsatz WSW

Zwei Dreiecke sind kongruent (deckungsgleich), wenn sie in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Planfigur

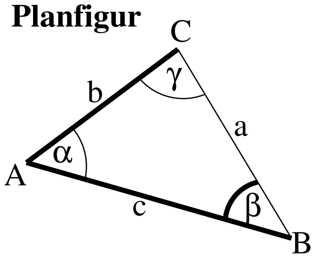


Konstruktionsbeschreibung
Beispiel: gegeben: b=5cm, $\alpha = 40, \gamma = 70$
Konstruiere
1. die Seite b mit den Punkten A und C
2. den Winkel α
2. den Winkel γ
3. den Schnittpunkt der beiden Schenkel, das ist der Punkt B.

Kongruenzsatz SSW

Zwei Dreiecke sind kongruent (deckungsgleich), wenn sie in zwei Seiten und dem Winkel, der der längeren Seite gegenüberliegt, übereinstimmen.

Planfigur



Konstruktionsbeschreibung
Beispiel: gegeben: c=5cm, b=7cm, $\beta = 100$
Konstruiere
1. die Seite c mit den Punkten A und B
2. den Winkel β
2. den Kreis um A mit dem Radius b=7cm
3. den Schnittpunkt des Kreises mit dem freien Schenkel, das ist der Punkt C.

4 Prozentrechnung

Prozent-Bruch-Dezimalbruch

Anteile können als Bruch, Dezimalbruch oder Prozent geschrieben werden. Das Wort **Prozent** stammt vom italienischen „per cento" und kann mit „von hundert" übersetzt werden.

75% bedeutet also $\frac{75}{100}$ $\qquad 0,125 = \frac{12,5}{100} = 12,5\%$

Jeder Prozentsatz ist also ein Bruchteil mit dem Nenner 100.

$8\% = \frac{8}{100} = 0,08$

Lerne auswendig!

$\frac{1}{2} = 50\%$ $\quad \frac{1}{4} = 25\%$ $\quad \frac{3}{4} = 75\%$ $\quad \frac{1}{5} = 20\%$ $\quad \frac{1}{20} = 5\%$

$\frac{1}{8} = 12,5\%$ $\quad \frac{1}{10} = 10\%$ $\quad \frac{1}{3} = 33,3\%$ $\quad \frac{1}{100} = 1\%$ $\quad \frac{1}{25} = 4\%$

Der Prozentsatz ist gesucht

Wieviel Prozent sind 12 von 40?

100% → 40	
? → 12	

Anteile können als Bruch geschrieben werden:
(siehe Karteikarte Prozent-Bruch-Dezimalbruch)
12 von 40 = $\frac{12}{40} = 0,3 = 30\%$

12 von 40 sind also 30%

Der Anteil (Prozentwert (W)) ist gesucht

Wieviel **sind** 7% von 650m?

100% → 650m	
7% → ?	

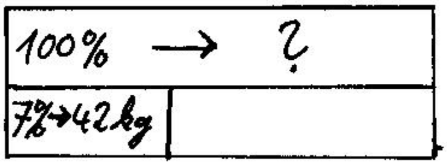
Der Anteil wird mit dem Dreisatzschema berechnet:

$$\begin{array}{lll} 100\% & \rightarrow & 650\text{m} \\ 1\% & \rightarrow & \frac{650}{100} \\ 7\% & \rightarrow & \frac{650 \cdot 7}{100} = 45,5m \end{array}$$

7% von 650m sind 45,5m.

<u>Das „Ganze“ (Grundwert (G)) ist gesucht.</u>

42kg sind 7% **<u>von</u>** ?



Das „Ganze“ wird mit dem Dreisatzschema berechnet:

$$\begin{array}{lll} 7\% & \rightarrow & 42\text{kg} \\ 1\% & \rightarrow & \frac{42}{7} \\ 100\% & \rightarrow & \frac{42\cdot 100}{7} = \frac{6\cdot 100}{1} = 600kg \end{array}$$

42kg sind 7% von <u>600kg</u>.

Begriffe/Formel zur Prozentrechnung

Das Ganze wird Grundwert (G) genannt.
Der Anteil vom Grundwert ist der Prozentwert (W).
p ist die Prozentzahl.

Den Prozentwert (W) berechnet man mit der Formel:

$W = \frac{G \cdot p}{100}$

Beispiel:
Eine Hose kostete 80 € bevor sie um 15% ermäßigt wurde.
G= 80, p=15, W= ?

$W = \frac{80 \cdot 15}{100}$
W=12

Die Hose wurde um 12 € ermäßigt und kostet jetzt noch 68 €.

Wenn der Grundwert (G) oder die Prozentzahl (p) gesucht ist, setzt man alle gegebenen Werte in die Formel ein und löst die Gleichung auf.

Beispiele zur Prozentrechnung mit Formeln

G gesucht: Michel bekam bei der Schülersprecherwahl 78 Stimmen, das waren 15% der abgegebenen Stimmen.
G= ?, p= 15, W=78

$$78 = \frac{G \cdot 15}{100} \quad | \cdot 100$$
$$7800 = G \cdot 15 \quad | :15$$
$$520 = G$$

Es wurden 520 Stimmen abgegeben.

p gesucht: Michaela bekam bei der Schülersprecherwahl 182 Stimmen. Es wurden 520 Stimmen abgegeben.
G= 520, p= ?, W= 182

$$182 = \frac{520 \cdot p}{100} \quad | \cdot 100$$
$$18200 = 520 \cdot p \quad | :520$$
$$35 = p$$

Michaela bekam 35% der abgegebenen Stimmen.

5 Zinsrechnung

Begriffe/Formel zur Zinsrechnung

Die Zinsrechnung ist eine Anwendung der Prozentrechnung.
Während man die Prozentrechnung für alle beliebige Größen benutzt, geht es bei der Zinsrechnung immer um Geldbeträge, für die man Zinsen bekommt. Deshalb nutzt man andere Begriffe:

Prozentrechnung	**Zinsrechnung**	
Grundwert (G)	Kapital (K)	Die Zinsen für ein Jahr berechnet
Prozentzahl (p)	Zinssatz (p)	man mit der Formel:
Prozentwert (W)	Zinsen (Z)	$Z = \frac{K \cdot p}{100}$

Beispiel:
Heinz legt für 1 Jahr 500 € bei einem Zinssatz von 2,5 % an.
K= 500, p=2,5, Z= ?

$Z = \frac{500 \cdot 2{,}5}{100}$

Z=12,5 €

Hans bekommt 12,50 € Zinsen, insgesamt hat er nach einem Jahr 512,50 €.

Beispiele zur Zinsrechnung (K oder p gesucht)

K gesucht: Michel bekommt nach einem Jahr 16,80 € Zinsen. Der Zinssatz beträgt 3,2%
K= ?, p= 3,2, Z=16,80

$$16{,}8 = \frac{K \cdot 3{,}2}{100} \quad | \cdot 100$$
$$1680 = K \cdot 3{,}2 \quad | :3{,}2$$
$$525 = K$$

Michel hat vor einem Jahr 525 € angelegt.

p gesucht: Michaela hat 820 € angelegt. Nach einem Jahr hat sie 834,76 € .
K= 820, p= ?, Z= 14,76

$$14{,}76 = \frac{820 \cdot p}{100} \quad | \cdot 100$$
$$1476 = 820 \cdot p \quad | :820$$
$$1{,}8 = p$$

Der Zinssatz beträgt 1,8%.

6 Terme und Gleichungen

Terme und Variablen

Berechnungen kann man allgemein als **Term** aufschreiben. Anstelle von Zahlen schreibt man dabei Buchstaben. Diese Buchstaben nennt man **Variablen**. Variablen sind Platzhalter für Zahlen.
Beispiel: Umfang eines Rechtecks
Term: $2 \cdot a + 2 \cdot b$ Variablen: a steht für die Länge; b steht für die Breite.

Werte von Termen
Wenn man für die Variablen Zahlen einsetzt, kann man den **Wert des Terms** berechnen.
Beispiel:
$2 \cdot a + 2 \cdot b$ Setzt man für a=7 und b=3 ein, ergibt sich:
$2 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 20$
Für a=7 und b=3 ist der Wert des Terms also 20.

Gleichungen lösen I

Du kennst schon seit der Grundschule Rechenterme mit Platzhaltern wie $7 + \square = 13$. Gesucht wird die Zahl, die man einsetzen muss, damit die Gleichung wahr wird. Statt des Platzhalters nimmt man Buchstaben (x;y;...). Sie heißen **Variablen**.
Um sich ein mühsames Probieren zu ersparen, formt man die Gleichung so um, dass ihre Lösung die gleiche bleibt. Dabei gilt die Regel, dass man <u>**auf beiden Seiten der Gleichung das Gleiche**</u> rechnen muss. Du darfst auf beiden Seiten

− eine gleiche Zahl addieren

$$\begin{aligned} x-4 &= 5 \quad +4 \\ x-4+4 &= 5+4 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

− eine gleiche Zahl subtrahieren

$$\begin{aligned} x+7 &= 13 \quad -7 \\ x+7-7 &= 13-7 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

− mit einer gleichen Zahl multiplizieren

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot x &= 6 \quad \cdot 2 \\ \frac{1}{2}\cdot x \cdot 2 &= 6 \cdot 2 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

− durch eine gleiche Zahl dividieren

$$\begin{aligned} 3\cdot x &= 18 \quad :3 \\ 3\cdot x :3 &= 18 :3 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

<u>Beachte: x soll in der letzten Zeile alleine auf einer Seite stehen!</u>

Gleichungen lösen II

Häufig sind mehrere Schritte nötig, um eine Gleichung zu lösen.

Bsp.: $-3x + 5 = 23$

Als erstes musst du auf beiden Seiten addieren/subtrahieren (Strichrechnung):

$$\begin{aligned} -3x + 5 &= 23 \qquad &| -5 \\ -3x &= 18 \end{aligned}$$

Als nächstes musst du auf beiden Seiten multiplizieren/dividieren (Punktrechnung):

$$\begin{aligned} -3x &= 18 \qquad &| : (-3) \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Manchmal musst du auch auf beiden Seiten addieren/subtrahieren. Bsp.:

$$\begin{aligned} 2x - 7 &= 7x + 8 \qquad &| +7 \\ 2x &= 7x + 15 \qquad &| -7x \\ -5x &= 15 \qquad &| : (-5) \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Gleichungen lösen III

Bei längeren Gleichungen musst du zuerst die Gleichung vereinfachen. Dazu fasst du auf beiden Seiten Terme zusammen.

$$\begin{aligned} 5x - 11 + 4x - 2 &= 18x - 21 - 3x + 20 && && \text{Zusammenfassen} \\ 9x - 13 &= 15x - 1 && | -15x && \text{addieren/subtrahieren} \\ -6x - 13 &= -1 && | +13 && \\ -6x &= +12 && | : (-6) && \text{dividieren/multiplizieren} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wahrscheinlichkeiten

Wenn bei einem Zufallsversuch alle **Ergebnisse** gleich wahrscheinlich sind, kann man die Wahrscheinlichkeit wie folgt bestimmen:

Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses = $\frac{1}{Anzahl\ \ aller\ \ Ergebnisse}$

Bsp.: Beim Wurf eines Würfels gibt es 6 Ergebnisse, nämlich die Zahlen von 1 bis 6. Alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich. Also ist die Wahrscheinlichkeit für jede Zahl $\frac{1}{6}$

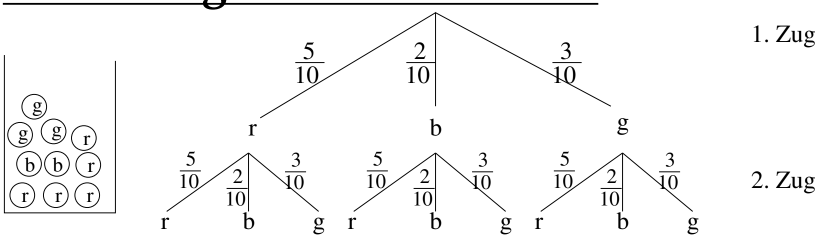
Ereignisse

Bei einem Zufallsversuch führen häufig mehrere Ergebnisse zum Erfolg.
Alle Ergebnisse, die zum Erfolg führen heißen **günstige Ergebnisse**.
Ein **Ereignis** besteht aus mehreren **günstigen Ergebnissen**.
Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis berechnet man wie folgt:

Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses = $\frac{Anzahl\ \ der\ \ guenstigen\ \ Ergebnisse}{Anzahl\ \ der\ \ moeglichen\ \ Ergebnisse}$

Bsp.:Mit einem Würfel soll eine gerade Zahl gewürfelt werden.
günstige Ergebnisse: 2, 4 und 6, also gibt es drei günstige Ergebnisse
Anzahl aller Ergebnisse: 6 (nämlich die Zahlen 1 bis 6)
Wahrscheinlichkeit für eine gerade Zahl = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Zweistufige Zufallsversuche



Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich bei zweistufigen Zufallsversuchen mit einem Baumdiagramm ermitteln.
Produktregel
Man berechnet die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades multipliziert.
Bsp.: $P(b,r) = \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{10}{100} = 0,10 = 10\%$
Summenregel
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse addiert. Bsp.:

$$\begin{aligned} P(zwei\ \ gleiche\ \ Kugeln) &= P(r,r) + P(b,b) + P(g,g) \\ &= \frac{25}{100} + \frac{4}{100} + \frac{9}{100} = \frac{38}{100} = 0,38 = 38\% \end{aligned}$$